Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu e-mail: boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2012/2013.. feladatsor**
5.-6. évfolyam

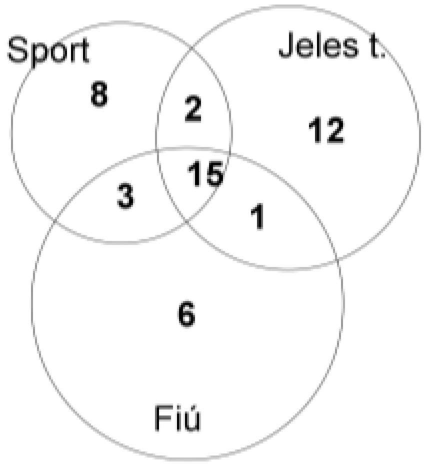
MEGOLDÁSOK

1. Nézzük először, hogy hány csak 2-vel osztható szám van. 1006 páros szám van 2013-ig, de ezek közt vannak olyanok, melyek nem csak 2-vel oszthatóak.
   Nézzük azokat, melyeknek van 2 osztójuk is.
   2-vel és 3-mal, azaz 6-tal: 335
   2-vel és 5-tel, azaz 10-zel: 201
   2-vel és 7-tel, azaz 14-gyel: 143
   Ezeket nyilván rendre le kell vonni a 2-vel osztható számok számából, de vigyázzunk, mert így a 30 például kétszer is levonásra kerül, egyszer a 6-tal, egyszer pedig a 10-zel osztható számok közt, holott csak egyszer szerettük volna levonni, vagyis azokat a számokat, melyeknek 3 osztójuk is van, vissza kell tenni egyszer, hogy csak 1-szer vonjuk ki őket. Nézzük ezek számát.
   2-vel, 3-mal, 5-tel, azaz 30-cal: 67
   2-vel, 3-mal, 7-tel, azaz 42-vel: 47
   2-vel, 5-tel, 7-tel, azaz 70-nel: 28
   Persze akadnak olyan számok is, melyek a megadott 4 szám mindegyikével oszthatóak. Őket eddig egyszer számoltuk a párosak közt, aztán 3-szor levontuk a legalább 2 osztóval bíró számoknál, majd ismét hozzáadtuk 3-szor a legalább 3 osztóval bíró számoknál, tehát most épp egyszer számoltuk őket, azaz ki kell vonnunk ezeket, hogy megkapjuk a csak a 2-vel osztható számok számát.
   2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel, azaz 210-zel osztható: 9.
   Összegezve: 1006 – 335 – 201 – 143 + 67 + 47 + 28 –9 = 460 olyan szám van 1 és 2013 közt, mely a felsorolt 4 szám közül csak a 2-vel osztható.
   Hasonló gondolatmenettel a felsorolt 4 szám közül csak a 3-mal osztható szám 231 van, csak 5-tel osztható 115, csak 7-tel osztható 77. Tehát a négy szám közül pontosan eggyel osztható számok száma 460 + 231 + 115 + 77 = 883.

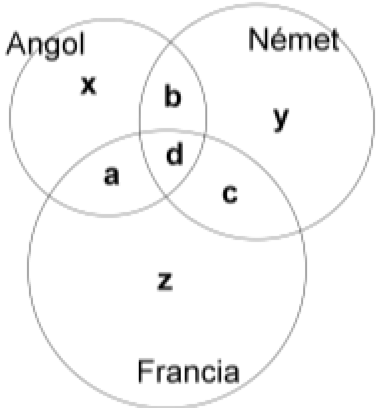
2. Az előző feladat eredményeit felhasználva,
   2-vel és 3-mal, azaz 6-tal osztható: 335 szám,
   2-vel és 5-tel, azaz 10-zel osztható: 201 szám, 3
   -mal és 5-tel, azaz 15-tel osztható: 134 szám.
   Továbbá: 2-vel, 3-mal, 5-tel, azaz 30-cal osztható: 67 szám.
   Azaz azon számok száma, melyek oszthatóak 2-vel és 3-mal, de 5-tel nem: 335 – 67 = 268. Hasonlóan adódik, hogy
   csak 2-vel és 5-tel osztható szám van 134,
   csak 3-mal és 5-tel osztható szám van 67.

   Azaz a megadott számok közül pontosan 2 osztója van 268 + 134 + 67 = 469 számnak.

3. Készítsünk halmazábrát, és töltsük ki az egyes részhalmazokat az adatok alapján.
Nézzük, hogyan kerültek a számok az egyes mezőkbe. A hármas metszetbe azon fiúk száma kerül, akik jól tanulnak és sportolnak is, ilyen fiú van 15. A jól tanuló fiúk száma 16, közülük 15 sportol, azaz van 1, aki jól tanul, de nem sportol. Mivel a 18 sportoló fiú közül 15 jól is tanul, van 3, aki sportol, de nem tanul jól. A 28 sportoló közül 17 tanul jól, ezek közül 15 fiú, azaz van két lány is, aki sportol és jól tanul. Ezzel az összes metszetet megtaláltuk, az ábránk középső részét kitöltöttük. Jó tanuló van összesen 30, azaz még 30 – (2 + 15 +1) = 12 fő hiányzik, 28 sportoló van, azaz még 28 – (2 + 15 + 3) = 8 főt kell beírnunk, s végül, a 25 fiú közül még 25 – (3 + 15 +1) = 6 fiú hiányzik. Így az egész ábrát kitöltöttük. Ha összeadjuk az egyes mezőkben szereplő számokat, megkapjuk az osztálylétszámot. Így 47 adódik, holott a hetes 45 főt jelentett, ellentmondásra jutottunk



4. Készítsünk halmazábrát, az egyes részhalmazokban szereplő diákok számát jelöljük az ábra szerint.
Mivel mindenki tanul legalább egy nyelvet, így az ábrában szerepel az egész osztály, vagyis:
$x + \mathrm{y} + \mathrm{z} + \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{d} = 24$
Angolul 15 fő tanul, azaz $x + \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{d} = 15$
Németül 14 fő tanul, azaz $y + b + c + \mathrm{d} = 14$
Franciául 5 fő tanul, azaz $z + \mathrm{a} + c + \mathrm{d} = 5$
Pontosan két nyelvet 6 fő tanul, azaz $\mathrm{a} + \mathrm{b} + c = 6$



Adjuk össze az egyes nyelvekre vonatkozó 3 egyenletet, majd rendezzük kicsit át a tagokat.

$$34 = x + y + z + 2(a + b + c) + 3d =$$
$$= (x + y + z + a + b + c + d) + (a + b + c) + 2d$$
.

Az első zárójelben szereplő összegről tudjuk, hogy 24, a második zárójelben szereplő összeg pedig 6. Ezt figyelembe véve $4 = 2\mathrm{d}$ adódik, vagyis $d = 2$. Azaz 2 olyan diák van, aki mindhárom nyelvet tanulja.